

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ рОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

(ДВФУ)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**  **кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования** | | |
|  | |
| СПЛАЙН-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО СПЛАЙНА |
|  |

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

по образовательной программе подготовки бакалавров

по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

|  |  |
| --- | --- |
| Работа защищена  с оценкой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Регистрационный номер \_\_\_\_\_\_\_  «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020г. | Студент группы № Б8117-02.03.01  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Михайлов Д.С.  (подпись)  «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020г.  Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (должность, ученое звание)  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (подпись) (ФИО)  «\_\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020г. |

г. Владивосток

2020

# Оглавление.

[Введение. 2](#_Toc43324534)

[Глава 1. Теоретическая часть. 4](#_Toc43324535)

[1.1. Понятие дискретного сплайна. 4](#_Toc43324536)

[1.2. Понятие о методе сплайн-коллокаций. 6](#_Toc43324537)

[1.3. Сведение схем метода сплайн-коллокации к разностным схемам. 8](#_Toc43324538)

[Глава 2. Проведение вычислительных экспериментов 11](#_Toc43324539)

[2.1. Выбор примеров для вычислительных экспериментов. 11](#_Toc43324540)

[2.2. Вычислительные эксперименты. 12](#_Toc43324541)

[2.3 Вывод из наблюдений. 13](#_Toc43324542)

[Заключение. 14](#_Toc43324543)

[Литература. 15](#_Toc43324544)

[Код программы. 16](#_Toc43324545)

# Введение.

Объектом исследования являются численные методы решения задач математической физики, а также программное обеспечение, реализующее эти методы.

Цель работы – ознакомиться с численными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью сплайнов, а именно дискретно-коллокационными разностными схемами, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

• создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его на языке программирования Python, протестировать программы;

• освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;

• приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовой работой предполагает выполнение следующих задач:

• дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;

• получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;

• овладение методикой решения конкретных задач;

• развитие навыков самостоятельной работы;

• развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;

• приобретение навыков оформления описаний программного продукта;

• повышение общей и профессиональной эрудиции.

# Глава 1. Теоретическая часть.

## Понятие дискретного сплайна.

При построении сплайнов для стыковки звеньев между собой накладываются ограничения на производные сплайна (обычно требуется их непрерывность). Однако этот способ не является единственным. Возможен и другой подход, состоящий в том, что стыковка звеньев осуществляется путем приравнивания разделенных разностей от многочленов, описывающих соседние звенья сплайна.

Пусть на отрезке задана сетка ∆: в узлах которой известны значения *Дискретным интерполяционным кубическим сплайном* называется функция которая удовлетворяет следующим условиям:

1. на каждом из интервалов является кубическим многочленом
2. при заданных

Условия (1.1.1), (1.1.2) можно рассматривать как дискретный аналог условий непрерывности первой и второй производных. Этим и объясняется употребление термина «дискретный сплайн». Очевидно, что при дискретный кубический сплайн переходит в кубический сплайн класса .

Для сплайна необходимы граничные условия, в качестве которых рассматриваются те же четыре типа, что и для кубических сплайнов класса , а именно:

Условия типа III носят название *периодических.* Естественно требовать их выполнения в том случае, когда интерполируемая функция — периодическая с периодом *b — а*.

Рассмотрим алгоритм построения дискретного сплайна. Введем обозначение

Нетрудно видеть, что в таком случае сплайн при записывается в виде

Формула (1.1.4) по виду совпадает с формулой для кубического сплайна класса . Различный смысл имеют лишь величины .

Отметим, что из (1.1.4) следуют соотношения

Сплайн , записанный в виде (1.1.4), удовлетворяет условиям интерполяции и условиям (1.1.2).

Подставляя в (1.1.1) вычисленные из (1.1.4) значения сплайна, получаем

## Понятие о методе сплайн-коллокаций.

Пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

удовлетворяющее краевым условиям

В дальнейшем всюду предполагается, что краевая задача (1.2.1), (1.2.2) имеет единственное решение . Требования к гладкости , а также ограничения на заданные коэффициенты будут оговариваться особо в каждом конкретном случае.

Введем на сетку Будем искать приближенное решение задачи (1.2.1), (1.2.2) в виде дискретного сплайна с узлами на сетке .

Потребуем, чтобы сплайн удовлетворял уравнению (1.2.1) в точках (*условия коллокации*), и краевым условиям (1.2.2):

Соотношения (1.2.3), (1.2.4) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно параметров сплайна. Точки называются *узлами коллокации*. Их количество определяется размерностью пространства сплайнов класса , которая равна . Так как удовлетворяет двум граничным условиям (1.2.4), то количество узлов коллокации должно быть равно . Их расположение на отрезке не может быть произвольным. Так, например, на любом из промежутков не должно быть более трех узлов коллокации. В противном случае сплайн на определялся бы независимо от других промежутков и, в частности, независимо от граничных условий. Ясно, что такой сплайн, вообще говоря, не имеет никакого отношения к решению задачи (1.2.1), (1.2.2). Кроме того, очевидно, в качестве узлов коллокации не могут быть взяты точки, в которых коэффициенты уравнения (1.2.1) имеют особенности. В дальнейшем мы предполагаем, что узлы коллокации упорядочены:

Конкретный вид системы (1.2.1), (1.2.2) зависит от выбранного способа представления сплайна и от расположения узлов коллокации.

Метод сплайн-коллокации может быть использован как средство построения разностных схем. Такие схемы обладают рядом полезных свойств, например, они имеют одинаковый порядок точности на равномерных и неравномерных сетках. Однако этот подход пригоден для сравнительно простых задач и не исчерпывает всех возможностей, заложенных в методе сплайн-коллокации. Наиболее полно они могут быть реализованы только при использовании аппарата В-сплайнов.

Отметим, что в методе сплайн-коллокации можно использовать и другие типы сплайнов — более высокой степени, эрмитовы, дискретные и т.д. Однако именно на основе кубических сплайнов класса удается построить алгоритмы, наиболее простые по реализации и в то же время пригодные для решения широкого круга задач. Однако, в данной работе будет использоваться дискретный сплайн для нахождения решения (1.2.1), (1.2.2).

## Сведение схем метода сплайн-коллокации к разностным схемам.

Будем называть разностную схему для задачи (1.2.1), (1.2.2) эквивалентной схеме метода сплайн-коллокации, если получающиеся в процессе их реализации значения приближенного решения в узлах сетки совпадают.

Простейшие схемы метода сплайн-коллокации получаются, когда узлы коллокации выбираются совпадающими с узлами сплайна: В этом случае систему (1.2.3), (1.2.4) можно преобразовать в эквивалентную разностную схему.

Пусть в уравнении (1.2.1)

Обозначим . Сплайн при определяется формулой

в которой величины следует заменить на . Из (1.2.3) имеем

Вычисляя отсюда величины и подставляя их в соотношения

получаем

.

Далее, используя вытекающие из формулы

выражения для в уравнениях (1.2.3) и учитывая (1.3.2), находим

Уравнения (1.3.3) – (1.3.5) образуют разностную схему для решения задачи (1.2.1), (1.2.2). Пусть выполнены условия

Нетрудно видеть, что в этом случае система (1.3.3) – (1.3.5) при произвольной сетке имеет матрицу с диагональным преобладанием, следовательно, она однозначно разрешима.

Таким образом, реализация метода сплайн-коллокации фактически сведена к реализации разностной схемы. Методом прогонки из системы (1.3.3) – (1.3.5) вычисляются неизвестные Определяя затем из соотношений (1.3.2) величины , получаем приближенное решение задачи (1.2.1), (1.2.2) в виде дискретного сплайна

# Глава 2. Проведение вычислительных экспериментов

## 2.1. Выбор примеров для вычислительных экспериментов.

Существование сплайна не гарантировано для произвольных параметров . Однако при выполнении неравенств

Сплайн существует и единствен для всех типов граничных условий. Это следует из того, что в этом случае матрицы всех систем будут с диагональным преобладанием.

Для вычислительных экспериментов используем три разных параметра :

Последний параметр будет использоваться для равномерной сетки.

Следующие примеры будут использованы в вычислительных экспериментах:

**Пример 1.**

* точное решение.

**Пример 2.**

* точное решение.

**Пример 3.**

* точное решение.

## 2.2. Вычислительные эксперименты.

В качестве множества будем брать следующие значения:

* ,
* при .

**Таблица 1. Точное и приближенное решения примера 1.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | -2.0 | -2.1817 | -2.3065 | -2.4819 | -2.6907 | -2.8284 |
|  | -2.0346 | -2.2207 | -2.353 | -2.5416 | -2.7709 | -2.9293 |
|  | -2.047 | -2.235 | -2.366 | -2.5564 | -2.7906 | -2.9488 |
|  | -2.0601 | -2.2495 | -2.3822 | -2.5727 | -2.806 | -2.964 |
|  | -2.0218 | -2.2062 | -2.3368 | -2.5254 | -2.7555 | -2.9141 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | -2.0 | -2.1909 | -2.3664 | -2.5298 | -2.6833 | -2.8284 |
|  | -2.0634 | -2.2628 | -2.4511 | -2.6308 | -2.8037 | -2.9713 |

**Таблица 2. Значения абсолютной погрешности примера 1.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | 0.0346 | 0.039 | 0.0465 | 0.0597 | 0.0802 | 0.1009 |
|  | 0.0472 | 0.0533 | 0.0595 | 0.0745 | 0.0999 | 0.1204 |
|  | 0.0601 | 0.0678 | 0.0757 | 0.0908 | 0.1153 | 0.1356 |
|  | 0.0218 | 0.0245 | 0.0303 | 0.0435 | 0.0648 | 0.0857 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 0.0634 | 0.0719 | 0.0847 | 0.101 | 0.1204 | 0.1429 |

Для данной задачи лучшим параметром дискретного сплайна является параметр

Поскольку при этом параметре схема обладает наименьшей погрешностью относительно других указанных параметров.

**Таблица 3. Точное и приближенное решения примера 2.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | 0.6667 | 0.8654 | 1.0226 | 1.2741 | 1.6234 | 1.8856 |
|  | 0.7073 | 0.9316 | 1.1119 | 1.4039 | 1.816 | 2.1327 |
|  | 0.7091 | 0.9344 | 1.1145 | 1.4078 | 1.8231 | 2.1397 |
|  | 0.7112 | 0.9379 | 1.1191 | 1.4128 | 1.8277 | 2.1442 |
|  | 0.7052 | 0.9281 | 1.1073 | 1.399 | 1.8114 | 2.1282 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 0.6667 | 0.8764 | 1.1043 | 1.3492 | 1.61 | 1.8856 |
|  | 0.7134 | 0.9541 | 1.2195 | 1.5089 | 1.8215 | 2.157 |

**Таблица 4. Значения абсолютной погрешности примера 2.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | 0.0406 | 0.0662 | 0.0893 | 0.1298 | 0.1926 | 0.2471 |
|  | 0.0424 | 0.069 | 0.0919 | 0.1337 | 0.1997 | 0.2541 |
|  | 0.0445 | 0.0725 | 0.0965 | 0.1387 | 0.2043 | 0.2586 |
|  | 0.0385 | 0.0627 | 0.0847 | 0.1249 | 0.188 | 0.2426 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 0.0467 | 0.0777 | 0.1152 | 0.1597 | 0.2115 | 0.2714 |

Для данной задачи лучшим параметром дискретного сплайна является параметр

Поскольку при этом параметре схема обладает наименьшей погрешностью относительно других указанных параметров.

**Таблица 5. Точное и приближенное решения примера 3.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | 0 | 0.0344 | 0.0551 | 0.071 | 0.0507 | 0 |
|  | 0 | 0.0337 | 0.0541 | 0.0697 | 0.0488 | 0 |
|  | 0 | 0.0337 | 0.0538 | 0.0696 | 0.0502 | 0 |
|  | 0 | 0.0346 | 0.0554 | 0.0714 | 0.0509 | 0 |
|  | 0 | 0.0328 | 0.0526 | 0.068 | 0.0481 | 0 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 0 | 0.0361 | 0.0628 | 0.071 | 0.0525 | 0 |
|  | 0 | 0.0362 | 0.063 | 0.0713 | 0.0527 | 0 |

**Таблица 6. Значения абсолютной погрешности примера 3.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.19 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 1 |
|  | 0 | 0.0007 | 0.001 | 0.0013 | 0.0019 | 0 |
|  | 0 | 0.0007 | 0.0013 | 0.0014 | 0.0005 | 0 |
|  | 0 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0002 | 0 |
|  | 0 | 0.0016 | 0.0025 | 0.003 | 0.0026 | 0 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 0 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0002 | 0 |

Для данной задачи лучшим параметром дискретного сплайна является параметр

Поскольку при этом параметре схема обладает наименьшей погрешностью относительно других указанных параметров.

## 2.3 Вывод из наблюдений.

Как видно из таблиц решений примеров (1) – (3), коллокационная разностная схема, составленная на основе дискретного интерполяционного кубического сплайна, обеспечивает приближенное решение краевой задачи для ОДУ.

Преимущество дискретного сплайна заключается в возможности выбора параметра сплайна, в то время как у кубического сплайна класса нет подобного параметра. Это характеризуется тем, что мы может подобрать такой параметр сплайна, что приближенное решение будет приближенным максимально возможно, то только делает точнее коллокационные разностные схемы.

Минусом решения задачи схемами (1.3.3) – (1.3.5) является ограничение в выборе краевых задач для ОДУ, а именно условие .

Стоит отметить, что параметр дискретного сплайна часто используется для более точного построения приближенного решения, т. е. решения с наименьшей абсолютной погрешность. Но могут встречаться и задачи, в которых использование данного параметре будет невыгодным. Так в пример 3 в главе 2.1 – 2.2 лучшим параметром будет при равномерной сетке.

Погрешность приближенного решения, полученного с помощью разностной коллокационной схемы, является .

# Заключение.

В результате работы над курсовой работой приобрел практические навыки владения:

* современными численными методами решения задач математической физики;
* основами алгоритмизации для численного решения задач математической физики на одном из языков программирования, а именно на ЯП Python;
* инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической физики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

# Литература.

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, - М.: Наука, 1980 г. – 198 с., 296 с. [<http://bookre.org/reader?file=578409>]
2. Колобов А.Г. Схемы повышенной точности метода сплайн-коллокации: учебно-методическое пособие / Школа естественных наук ДВФУ. – Владивосток: Дальневосточный федеральный университет, 2018. – 53с.

# Код программы.

#/////////// Function parameters ///////////////////////////////////////////////////////////////////

q = lambda x: 1

r = lambda x: -x

func = lambda x: sin(x) / sin(1) - x

alpha\_0, alpha\_1 = 1, 1

beta\_0, beta\_1 = 0, 0

gamma\_0, gamma\_1 = 0, 0

Lmbd = lambda h0, h1: 1 - Nu(h0, h1)

Nu = lambda h0, h1: h0 / (h0 + h1)

#///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

def Spline(X):

#/////////// Initialization ////////////////////////////////////////////////////////////////////

sizeX = len(X)

h = [X[i+1] - X[i] for i in range(sizeX-1)]

eps = [h[i+1] for i in range(sizeX-2)]

index\_A = lambda h0, eps: 1 - eps\*\*2/h0\*\*2

index\_B = lambda h0, h1, eps: 2 + eps\*\*2/(h0\*h1)

index\_C = lambda h1, eps: 1 - eps\*\*2/h1\*\*2

index\_f0 = alpha\_0 \* h[0] - beta\_0 \* (1 - q(X[0]) \* h[0]\*\*2 / 3)

index\_f1 = beta\_0 \* (1 + q(X[1]) \* h[0]\*\*2 / 6)

index\_f2 = gamma\_0 \* h[0] + beta\_0 \* h[0]\*\*2 \* (2 \* r(X[0]) + r(X[1])) / 6

index\_l0 = beta\_1 \* (-1 - h[-1]\*\*2 \* q(X[-2]) / 6)

index\_l1 = alpha\_1 \* h[-1]\*\*2 + beta\_1 \* (1 - h[-1]\*\*2 \* q(X[-1]) / 3)

index\_l2 = gamma\_1 \* h[-1] - beta\_1 \* h[-1]\*\*2 \* (r(X[-2]) + 2 \* r(X[-1])) / 6

a = [0]

b = [index\_f0]

c = [index\_f1]

f = [index\_f2]

for i in range(1, sizeX-1):

a.append(Lmbd(h[i-1], h[i]) \* (1 + h[i-1]\*\*2 \* q(X[i-1]) \* index\_A(h[i-1], eps[i-1]) / 6))

b.append(-1 + h[i] \* h[i-1] \* q(X[i]) \* index\_B(h[i-1], h[i], eps[i-1]) / 6)

c.append(Nu(h[i-1], h[i]) \* (1 + h[i]\*\*2 \* q(X[i+1]) \* index\_C(h[i], eps[i-1]) / 6))

f.append(h[i-1] \* h[i] \* (Nu(h[i-1], h[i]) \* index\_A(h[i-1], eps[i-1]) \* r(X[i-1]) + index\_B(h[i], h[i-1], eps[i-1]) \* r(X[i]) + Lmbd(h[i], h[i-1]) \* index\_C(h[i], eps[i-1]) \* r(X[i+1])) / 6)

a.append(index\_l0)

b.append(index\_l1)

c.append(0)

f.append(index\_l2)

#/////////// Run-Through Method ////////////////////////////////////////////////////////////////

A, B = [-c[0]/b[0]], [f[0]/b[0]]

for i in range(1, sizeX):

e = a[i] \* A[i-1] + b[i]

A.append(-c[i] / e)

B.append((f[i] - a[i] \* B[i-1]) / e)

u = [0 for i in range(sizeX)]

u[-1] = (f[-1] - a[-1] \* B[-1]) / (b[-1] + a[-1] \* A[-1])

for i in range(sizeX-2, -1, -1):

u[i] = A[i] \* u[i+1] + B[i]

#/////////// Сalculation M ///////////////////////////////////////////////////////////////////

M = [r(X[i]) - u[i] \* q(X[i]) for i in range(sizeX)]

#/////////// Getting Splines //////////////////////////////////////////////////////////////////

Y = []

for i in range(sizeX-1):

for j in range(i, i+2):

t = (X[j] - X[i]) / h[i]

Y.append((X[j], u[i] \* (1 - t) + t \* u[i+1] - t \* (1 - t) \* h[i]\*\*2 \* ((2 - t) \* M[i] + (1 + t) \* M[i+1]) / 6))

return Y